

Caleidoscopios y simetría

JAVIER BRACHO

El discreto placer de mirar por el ojo de una cerradura, de ver sin estar, de ser testigo clandestino del acontecer en un mundo ajeno; la intimidad serena que infunde el acto de cerrar un ojo al acercar el otro a un hoyito de luz (telescopio, microscopio, cámara fotográfica, cerradura, rendija al baño del sexo opuesto...) para hacerse dueño de una imagen efímera, única e irrepetible, son sensaciones que condimentan el rito de asomarse a un caleidoscopio. El platillo es la simetría. La imagen depende del artefacto —puede ser un cilindro finísimo de madera tallada o de latón o bien de vil cartón forrado con orito y tener al otro extremo del ocular un redondel movable con cuentitas translúcidas, aceites viscosos, filamentos brillantes, arañitas o pequeños vitrales giratorios—, pero el principio es el mismo. El movimiento distrae y urde el hechizo —al girar otro poco este tubo mágico, cae un rombito azul y brincan al unísono por todos lados y en todas direcciones chispas azules que se integran a esos centros de confluencia que veíamos como “las flores rojas”; impacta el silencio con el que se produce esta catástrofe infinita que termina en un patrón totalmente inesperado (ya no son flores, ni rojas), asombrosamente diferente (el rombito no es tal), pero igualmente bello— porque la simetría no cambia, sólo cambió su instancia.

Aunque sepamos cómo funciona este aparato alucinógeno —es decir, que dentro del cilindro hay tres espejos formando un prisma triangular equilátero, que por el otro extremo del ocular entra la luz, traspasa las cuentitas llevándose el color y que luego rebota y rebota en los espejos hasta llegar al observador— no deja de ser fascinante la ilusión de un plano que se extiende virtualmente al infinito,

perdiendo su luminosidad en la distancia, con dibujos de coherencia obsesiva, intachable y repetitiva, como fascinantes son la geometría que lo sustenta y las matemáticas que en sus inmediaciones se han generado. ¿Por qué son básicamente el mismo todos los caleidoscopios que conocemos? Saltará el lector ducho que haya visto otro, pero el común de los mortales sólo ha visto ése, el clásico (y si por ahí hay alguien que no haya podido hacerlo ¡que se lo enseñen! o ¡que caiga la culpa sobre la conciencia social de nuestra civilización!). Sí, tienen razón los duchos. Sí hay otros diseños de caleidoscopios, no tan comunes, no tantos, y algunos sorprendentemente nuevos. Lástima que no podamos recurrir, como descaradamente lo hicimos arriba, a la experiencia vivida del lector para su descripción. Habrá que irse con tiento desde el elemento básico.

Un espejo

Ese ente asombroso que llamamos espejo —destíñase al asombro con su ineludible cotidianidad contemporánea; recupérese en la piel del aborigen ante la conciencia de enfrentar su imagen— es un pedazo de plano en el que rebota la luz como si fuera una pelota lanzada, sin efecto, contra el piso o la pared (“ángulo de incidencia igual a ángulo de reflexión”, reza el estribillo). El efecto que produce es el de abrir una ventana a un mundo virtual sobrepuesto al real. La ventana no puede traspasarse, tras ella se vislumbra un trozo idéntico del mundo real, pero invertido, se desdobra el “aquí” en un “allá” sólo asequible por la vista, y los habitantes de ese mundo virtual ven exactamente lo mismo que sus

contrapartes reales asomándose a la ventana (y lo ven invertido también: tampoco saben leer nuestros letreros).

Llamamos *reflexión* a la abstracción matemática del efecto de un espejo, completándola y corrigiendo sus pequeños defectos, por supuesto. Se piensa en el espejo como todo un plano (no solamente un trozo) y el efecto se produce sobre todo el espacio invirtiendo sus dos mitades, intercambiándolas, es decir, es una manera de “mandar” al espacio en sí mismo. Sólo el espejo, un plano completo, permanece inmóvil y funciona como espejo en ambas direcciones.

Hablaremos también de reflexiones en otras dimensiones. En un plano —piénsese en una mica, en la cual está dibujada una imagen, sobre un papel— el espejo de una reflexión es una línea recta —dibújese exactamente igual tanto en la mica como en el papel— y su efecto es intercambiar las dos mitades en que se divide el plano manteniendo la rigidez —levántese la mica, voltee y colóquese en su lugar de tal manera que la línea de la mica coincida punto a punto con la del papel; la imagen de la mica es el reflejo del original—. Dicho de otra manera, una reflexión en un plano es el efecto de girarlo 180° , un ángulo π , alrededor de una recta que es su espejo. Una reflexión en una recta es el efecto de girarla 180° alrededor de un punto, que es el espejo de la reflexión. Vale la pena observar que en esta idea cinética de una reflexión echamos mano implícita de que el plano y la recta viven en una dimensión extra —para hacer lo mismo con el espacio tendríamos que “girar” en una cuarta dimensión (que se puede)—, y conlleva el peligro de creer que reflejar es ese movimiento. Pues no es así, es el efecto; el resultado final, sin tiempo de por medio.

Vale también la pena introducir notación.¹ Si llamamos r a una reflexión, en el plano, digamos, para fijar ideas, y x es algo que vive en él, puede ser un punto o una figura, $r(x)$ —léase r de x — es la imagen de x bajo la reflexión. Por ejemplo, si b es el dibujo de una letra b en la mica y el espejo es vertical, $r(b)$ sería una letra d , o p si el espejo es horizontal. Sea A el dibujo de una letra A con su tipo más simple, y r alguna reflexión en su plano. Nótese que $r(A)$ siempre será una letra A , aunque inclinada o invertida, y si tomamos como espejo de la reflexión a la línea vertical que pasa por su ápice se tendrá explícitamente que $r(A) = A$. Esto es lo que llamaremos una *simetría*. Manchas de tinta en un pa-

pel que luego se dobla generan figuras con simetría de reflexión en la línea del doblar. Un cuerpo humano ideal, H digamos, tiene como simetría a la reflexión r en el plano que lo parte en mitades izquierda y derecha, $r(H) = H$.

Dos espejos (la peluquería)

No sé mucho de las estéticas de hoy en día, pero en mis tiempos una peluquería era tal por sus espejos (y por sus revistas, por supuesto). Subirse finalmente (no había prisa, esperar era parte exquisita del rito) a ese sillón majestuoso para ser elevado, a golpe de pedal y lentamente, era entrar —en ese estado de ser un simple objeto con pelos, resignado a la contemplación silenciosa— en el hechizo de dos espejos paralelos. El chango inmediato, el de enfrente, es el de siempre, el yo del baño, pero el siguiente es cautivante —o en ese entonces lo era, el de hoy ya es un pelón irredento—, y además, más y más, alternados cara y coco, hacia delante y hacia atrás, la palabra infinito ineludible. Vayamos al “siguiente”. Digamos que y soy yo, que r_1 es la reflexión en el espejo de enfrente y r_2 la reflexión en el de atrás. Es claro que $r_1(y)$ es el yo cotidiano del espejo, nada especial, y a $r_2(y)$ no lo estoy viendo (regla número 1: no mover la cabeza, orejas de por medio); pero a $r_1(r_2(y))$ sí lo estoy viendo: ése es el “siguiente”, el espejo me permite ver lo que hay detrás pero viéndolo enfrente: soy yo trasladado dos peluquerías más adelante. Aplicar esas dos reflexiones es una traslación, el efecto que tiene en la peluquería, P , es mandarla para atrás invertida, $r_2(P)$, y luego r_1 la manda para adelante, a $r_1(r_2(P))$, que queda en seguida de su reflexión inmediata $r_1(P)$ y ya no está invertida (el efecto de invertir dos veces es no-invertir).

Puntualicemos dos cosas. Primero, las reflexiones son ejemplos de algo más general que llamaremos *transformaciones rígidas* (porque preservan distancias), que son, como ya dijimos, maneras de mandar al espacio en sí mismo, o reglas para hacerlo. Otro ejemplo, que ya se nos apareció, además de las reflexiones, son las traslaciones: mover todo una distancia fija. Y segundo, estas transformaciones se pueden *componer*, es decir, aplicar una después de la otra para obtener una nueva. Si f y g son transformaciones (letras nuevas que pueden tomar el valor de cualquiera de las anteriores o de las que vienen), su *composición* es la transformación: “aplíquese g y luego f ” o bien “ g seguida de f ”. La denotamos por $f \circ g$ para tener la regla $f \circ g(x) = f(g(x))$ al aplicarse a objetos concretos, aunque nos obligue a leer en

¹ Notas para el amable lector al que le choque la notación matemática: no se aferre a su ritmo; las letras pierden su sentido fonético (y por lo tanto rompen el ritmo de la lectura) para adquirir otros significados. Déles su tiempo, que es el de las ideas.

dirección contraria.² Obsérvese que aquí el orden de los factores sí altera el producto: $r_2(r_1(y))$ está dos peluquerías más atrás, no lo veo y él sí me ve a mí, es distinto del “siguiente” $r_1(r_2(y))$; por tanto $r_1 \circ r_2 \neq r_2 \circ r_1$.

Ya que hablamos de transformaciones y su composición, hablemos de una que de tan obvia no es fácil ver: el movimiento no-movimiento, todo se queda en su lugar. Se le conoce como la *identidad*, la denotaremos 1 y está definida por la regla $1(x) = x$. Se cumple también que $1 \circ f = f \circ 1 = f$. Y otra cosa, para las reflexiones se tiene que $r \circ r = 1$, es decir, reflejar y volver a reflejar (en el mismo espejo) es como no hacer nada.

Antes de dejar la peluquería y entrar al clóset, notemos a manera de resumen que dos espejos paralelos generan por composición de sus reflexiones, r_1 y r_2 , una infinidad de transformaciones; muchas de ellas son traslaciones (cuando se componen un número par) y otras reflexiones (por ejemplo, $r_1 \circ r_2 \circ r_1$ es la reflexión en el espejo de atrás de la peluquería que está justo enfrente de mí, $r_1(P)$, a la que me comunica la ventana que puedo tocar, el espejo de r_1). A un conjunto de transformaciones como éste lo llamamos un *grupo*, pues la composición de dos de ellas también está ahí. El nombre técnico con que se conoce al grupo generado por dos espejos paralelos es el de *grupo diédrico infinito*, D_∞ , y es el representante abstracto de la simetría del mundo virtual que produce la peluquería. Otro ejemplo: consideremos la figura $|b|$; si tomamos las reflexiones en las dos líneas que indican las verticales, se genera una figura plana infinita: $\dots |d|b|d|b|d|b|d|b| \dots$. Tiene simetría diédrica infinita (pedazos de este tipo de simetría se pueden ver en muchísimos frisos de pirámides). Nótese que bastó para definirla una figura base, la b , y dos reflexiones que generan la simetría. Y nótese también que esencialmente es de dimensión uno. Puede vivir en una recta. Ahí, recuérdese, una reflexión es voltear en un punto, y cualquier par de reflexiones generan D_∞ . Por ejemplo de $\longrightarrow$, reflejando en los puntos se obtiene $\dots \longrightarrow \cdot \longleftarrow \cdot \longrightarrow \cdot \longleftarrow \cdot \longrightarrow \dots$.

Dos espejos (el baño)

Entremos ahora a un clóset fino, de casa *pirrurris*. No todos tuvimos esa experiencia, pero es fácil recrearla. Un pequeño pasillo con ropa y cajones a ambos lados, oloroso a lim-

pio y a perfumes y a zapatos, un espejo al fondo y otro en la puerta, que podemos cerrar a nuestras espaldas. Así, con la puerta cerrada, la simetría es equivalente a la de la peluquería. Pero al empezar a abrir la puerta algo cambia. La sensación de infinito se rompe para convertirse en un simple “muchos”, los clósets ya no están dispuestos en línea recta sino que se van ladeando y dan la impresión de un enorme pasillo circular hecho de pequeños clósets conectados por sus ventanas-espejos. No alcanzamos a ver todo pues las ventanas que comunican los clósets sólo permiten husmear hasta cierta distancia que se achica conforme se abre la puerta y el pasillo se curva. Recordemos. Cada espejo es una ventana en un plano ideal. En el momento en que estos planos no son paralelos, deben de intersectarse en una recta paralela a las bisagras de la puerta pero mucho más allá del mundito real, el clóset, en que estamos confinados. Este eje viaja en el plano del espejo del fondo, desde el infinito, siendo siempre el centro del pasillo circular hasta llegar al clóset, cuando la puerta ya está totalmente abierta y no vemos nada más que un simple clóset cuyos espejos han dejado de interactuar. Mejor vamos al baño.

¿Por qué ya no hacen esos juguetes no-juguetes espejos-botiquín? ¿Será cuestión de clase? ¿Tendrán los niños de hoy esa experiencia de jugar a verse moviendo las orejas de esos espejos triples? Si no: ¡qué caiga sobre la conciencia de los arquitectos! En fin, situémonos en uno de esos viejos baños ante un espejo fijo (el del botiquín), con reflexión r_1 , en cuyo extremo hay una bisagra y otro espejo, la oreja, con reflexión r_2 , (quizá haya que treparse al lavabo para recrear la experiencia). La bisagra es la intersección de los planos de reflexión, el *eje*. Totalmente abierta la oreja, se tiene que $r_1 = r_2$ y los espejos son ventanas al mismo mundo $r_1(B)$, donde B es el baño.

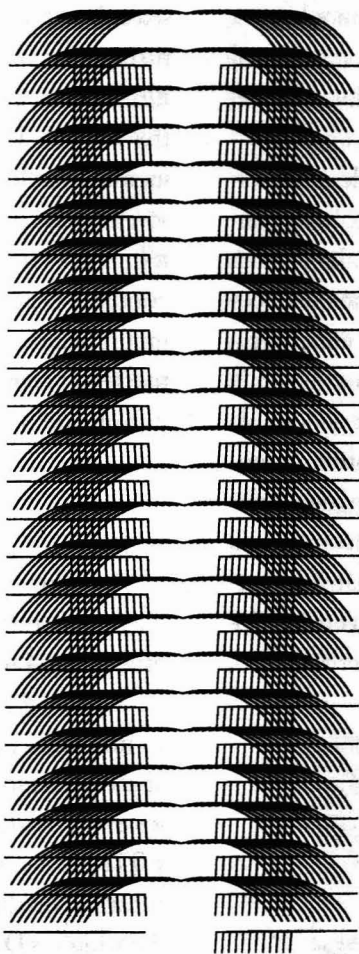
Puesta la oreja en ángulo recto $-\pi/2$, habrá que ir machacando—, vemos a $r_1(y)$ (y sigo siendo yo), a $r_2(y)$ y además hay otro yo, y’ digamos, justo atrás de la bisagra. ¿Es $r_1(r_2(y))$ o será $r_2(r_1(y))$? Lo que es claro es que no es el simple yo del espejo, porque si cierro un ojo, él cierra el otro—y otra cosa chistosa, no le veo el ojo abierto a y’, siempre queda justo detrás de la bisagra, se alinea con el eje—. No es un yo invertido, es el yo que ven todos menos yo; le puedo leer el letrero de su camiseta. Si veo por un lado de la bisagra, estaré viendo a $r_1(r_2(y))$ y si miro por el otro, veo a $r_2(r_1(y))$. La coherencia de las respuestas de y’ y el baño virtual que lo circunda obligan a concluir que $r_2 \circ r_1 = r_1 \circ r_2$. De hecho, y’ se obtiene de y girándolo en el eje de la bisagra 180° , un ángulo π . Alrededor del eje hay cuatro baños, dos

² Ya ve: no sólo cambia el ritmo sino a veces hasta la dirección (pasitos para atrás), aunque f.g puede leerse “f.bolita g”. Prometo que no se complicará más.

invertidos y dos no. Este tipo de simetría se ve con frecuencia en las esquinas de zapaterías y cafeterías, ampliándolas.

La imagen depende del ángulo de los espejos. Si los abrimos un poco más allá del recto se juntan los ojos de y' , desaparece su nariz y hasta podemos crear una mariposa con alas mis orejas, y desvanecerla; aunque en cada momento la imagen depende de dónde esté yo viendo, la bisagra separa dos posibles mundos visibles. Si, por el contrario, cerramos más acá del ángulo recto, aparece un ser de tres o cuatro ojos y dos narices hasta biseccionarse en dos nuevos yos, uno será $r_1(r_2(y))$ y el otro $r_2(r_1(y))$. Si vamos cerrando: de la bisagra salen dos nuevos espejos, una mariposa ala-de-oreja, hasta llegar al surgimiento de un nuevo yo perfecto detrás de la viagra, perdón, de la bisagra. En este punto, es fácil descubrir que el ángulo de los espejos es $\pi/3$. Pues alrededor del eje se ven seis rebanadas de baño, con yos en medio y husmeando, alternadamente invertidas y no invertidas (recuérdese que el pastel completo mide 2π , que entre 6 da $\pi/3$). A un lado de y está $r_2(y)$ (separado por la oreja-espejo-ventana) y le sigue $r_2(r_1(y))$. Es y girado en el eje un ángulo $2\pi/3$ (es decir, 120°), pues está dos rebanadas más allá en el pastel de seis y no está invertido. A él le sigue justo el de enfrente, $r_2(r_1(r_2(y)))$, que podríamos describir análogamente yendo hacia el otro lado, y viendo por el otro lado de la bisagra, como $r_1(r_2(r_1(y)))$. Se cumple entonces que $r_2 \circ r_1 \circ r_2 = r_1 \circ r_2 \circ r_1$, y ésta es una reflexión en un espejo virtual formado por r_2 del espejo-botiquín unido por la bisagra a r_1 del espejo-oreja, donde veo al más reciente yo. Por último, antes de salir del baño, observemos que al seguir cerrando el ángulo de los espejos van apareciendo más y más imágenes, pero que sólo en ciertos ángulos estas imágenes forman un todo coherente (en el ángulo π/n hay $2n$ gajos alternadamente invertidos y no invertidos).

Resumamos ya, generalizando un poco nuestras observaciones. Si r_1 y r_2 son reflexiones cuyos espejos se intersectan con un ángulo θ , entonces $r_1 \circ r_2$ es una rotación centrada en la intersección con ángulo 2θ . Cuando su ángulo es de la forma π/n , generan un grupo finito, llamado grupo diédrico



drico de orden n , D_n , que tiene n reflexiones y n rotaciones (incluyendo a la identidad como rotación de cero grados). Y cualquier cosa que se le ponga al gajo genera un dibujo, o imagen, con simetría diédrica. Ejemplos clásicos son los rosetones góticos, el papel picado a la china y algunas joyitas arquitectónicas.

Es interesante mencionar que Leonardo da Vinci sabía ya que esta simetría diédrica, junto con la rotacional asociada —tómense sólo a las n rotaciones—, es la única que pueden tener las figuras planas (por figura entiéndase la dibujada en un papel), claro, para cualquier n . Una simetría rotacional aparece en las galaxias espirales, las letras N o Z y la inefable suástica. A este fenómeno se le conoce ahora como el teorema de Leonardo.

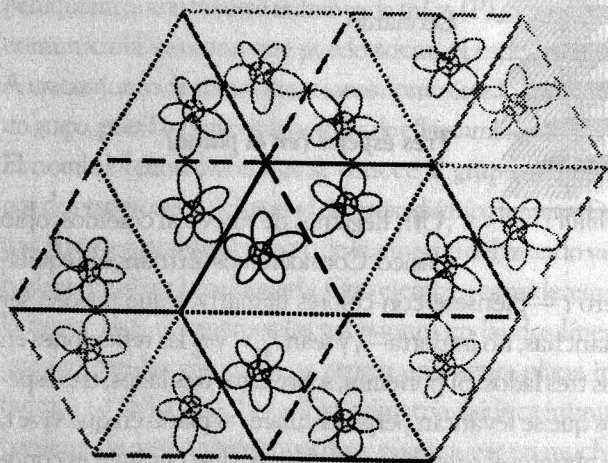
Tres espejos (en el plano)

¡Uf!, llegamos de nuevo al caleidoscopio clásico. Consideremos un triángulo equilátero

t —piénsese con colores llamativos que pueden ser manchas, no importa—, y sean r_1 , r_2 y r_3 las reflexiones en sus tres lados. Si ponemos, sobre estos tres lados, tres espejos que se levantan perpendiculares al plano en que vive t , se obtiene el caleidoscopio clásico. (Ése también es conocido como caleidoscopio de Brewster, pues un tal Brewster lo descubrió y patentó en la Escocia de 1815 y hoy día su manufactura representa toda una industria artesanal con una asociación, la Brewster Society, que realiza pomposos congresos anuales). Pero ya no necesitamos su parafernalia, podemos abstraernos del plano, del triángulo y de sus reflexiones asociadas para entender qué pasa.

Consideremos un vértice del triángulo t . Por él pasan los espejos (las líneas) de dos reflexiones; éstas generan grupos diédricos de orden 3 (se ven 6 triángulitos) pues el triángulo equilátero tiene ángulos $\pi/3$. Pero al componer con la tercera reflexión, o con cualquier palabra en las “letras” r_1 , r_2 y r_3 , el triángulo puede viajar e irse muy lejos. Y de hecho lo hace. Podemos llegar a cualquier punto del plano a partir de t , a golpe de aplicarle r ’s. La regla es la siguiente: digamos que queremos ir a un punto x . Pintemos de colores los lados de t : rojo, amarillo y azul corres-

pondiendo a r_1 , r_2 y r_3 , respectivamente. Vayamos hacia x desde t . Si nos conviene salir por el lado rojo, pasamos al triángulo $r_1(t)$ que también tiene sus lados coloreados y el rojo coincide con el de t . Si de aquí nos acercamos a x saliendo por el lado azul, brincamos a $r_1 \circ r_3(t)$; si de aquí decidimos salir por el amarillo, vamos a $r_1 \circ r_3 \circ r_2(t)$, etcétera. Hasta que llegamos a un triángulo que cubre a x . La palabra que construimos en las r 's depende del camino que escogimos, pero la transformación final *no*, por la coherencia local de los grupitos diédricos (bueno, a menos que a x le caiga una arista o un vértice de t y haya una poquita de ambigüedad). Eso es lo que hace perfectamente coherente a la imagen: un plano enmosaicado de triángulos equiláteros, imágenes de t , la mitad inversiones y la otra mitad *no*, como tablero de ajedrez; los lados de los triángulos formando tres haces paralelos que se encuentran en ángulos $\pi/3$, y formada cada una de estas rectas con intervalos rojo,



amarillo, azul, rojo, amarillo, azul... Las transformaciones del plano que dejan invariante a esta imagen son su grupo de simetrías. Son todas las posibles composiciones de r_1 , r_2 y r_3 ; el grupo es llamado *triangular de tipo 3,3,3*, $T[3,3,3]$, y contiene a todas las reflexiones en las rectas de los tres haces, a los diédricos en los vértices, a muchas translaciones y, por supuesto, a la identidad: representada por t .

Y, ahora sí, vayamos a la pregunta ¿hay otros *caleidoscopios*?, entendiendo a éstos como arreglos de espejos que generan una imagen coherente. Ya vimos a la familia que se forma con dos espejos y simetría diédrica. ¿Y con tres espejos en el plano, qué?

Supongamos que hay más. Que tres reflexiones generen una imagen coherente. Sus tres espejos, que son líneas en el plano, forman un triángulo t . En cada vértice de él debe generarse un grupo diédrico (para que, al menos ahí,

sea coherente). Esto implica (por nuestra sesión en el baño) que los espejos se encuentran en ángulos de la forma π/n . Podemos diferenciarlos, bautizarlos, y decir que los tres ángulos de t son π/p , π/q y π/r , donde p , q y r son números naturales (1, 2, 3, 4..., no los de las rifas).³ Y además, son mayores que 1, pues los triángulos no tienen ángulos π (que es el ángulo no-ángulo). Pero sabemos desde la secundaria (y por los griegos) que la suma de los ángulos de un triángulo es 180° , es decir, π . Así que nuestros numeritos deben cumplir $\pi/p + \pi/q + \pi/r = \pi$. Factorizando a π , y anulándolo se obtiene

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$$

La solución que ya conocemos es 3,3,3. Y es fácil ver que, ordenando a p , q y r en forma creciente, solamente hay otras dos: 2,4,4 y 2,3,6. Pues si p es muy grande, $1/p$ es muy chiquita, y si además q y r son tan grandes como p pues ya no damos para el uno. Los dos triángulos nuevos que aparecieron son los del clásico juego de escuadras. Espejos en sus aristas generan los grupos triangulares $T[2,4,4]$ y $T[2,3,6]$, y nuevos caleidoscopios que mostrarán rosetones con diferentes simetrías correspondiendo a sus diedriquitos D_2 y D_4 , o bien D_2 , D_3 y D_6 ; este último es el que da los rosetones más *chonchos* y corresponde al ángulo picudo de la escuadra-60. Y, como ya demostramos, no hay más.

Aunque vale la pena señalar, pero dejar al lector ducho que verifique, que dentro del grupo $T[2,3,6]$ se encuentra como subgrupo al $T[3,3,3]$; y que dentro del $T[2,4,4]$ se encuentran los de los mosaicos de la cocina, y que hay algunas cocinas —mosaico de triángulitos blanco y azul— con su simetría.

Tres espejos (en el espacio)

Acabamos de ver cómo diseñar tres tipos de caleidoscopios de “carne y hueso” a partir de sus triángulos básicos (el equilátero y las escuadras). Pero machaquemos con la receta: se cortan tres espejos (de esos de vidrio) rectangulares con la misma altura y cuyas bases tengan la misma longitud que uno de los lados del triángulo en cuestión; se colocan perpendiculares a un plano y se les envuelve

³ Perdón, ahora estoy usando a r como número; pero prometo nunca más volver a usarla como reflexión.

con *masking tape* para formar un “cilindro triangular” rígido cuyo interior es reflejante; ponga objetos translúcidos en un extremo con mucha luz y deléitese. Obsérvese ahora que estas ternas de espejos viven en ternas de planos muy especiales. Tres planos generales se intersectan en un punto, véase una esquina; pero estos que tenemos son, como terna, “algo así como paralelos”, nunca se intersectan los tres. De ahí que sus ángulos sumen π pues tienen un plano perpendicular común. Pero tres planos que sí se intersectan tienen ángulos que suman más que π : para convencerse voltee a una esquina piso-pared-pared o techo-pared-pared, los tres ángulos son rectos, $\pi/2$, y suman $3\pi/2 > \pi$, es decir (en grados), 90 más 90 más 90 son 270 y más que 180.

Por lo tanto, podemos construir nuevos caleidoscopios cuyos espejos abstractos se intersecten en un punto si encontramos tres planos-espejos con ángulos π/p , π/q y π/r para que den coherencia local (en sus intersecciones, recuerde la bisagra) pero con p , q y r cumpliendo ahora que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1$$

Las soluciones de esta desigualdad, suponiendo sin perder generalidad que $p \leq q \leq r$, son: 2,2, n (para cualquier n); 2,3,3; 2,3,4 y 2,3,5. (Observe que las ternas cercanas, pero mayores, en ese orden —2,3,6; 2,4,4 y 3,3,3— ya las conocemos, y que para todas las demás ternas la suma es menor que 1.) De nuevo, a los grupos que generan reflexiones con estas características se les llama *triangulares* y se les denota $T[p, q, r]$.

Los grupos $T[2,2,n]$ se pueden ver en el baño. Se coloca el espejo-oreja en un ángulo π/n con el espejo-botiquín, y en la esquina de abajo (más fácil que en la de arriba) se pone un nuevo espejo paralelo al piso y perpendicular (ángulos $\pi/2$) con los dos anteriores; es una esquina de espejos y el $T[2,2,2]$ es la esquina usual de un cuarto o zapatería.

Los grupos $T[2,3,3]$, $T[2,3,4]$ y $T[2,3,5]$ son los grupos de simetrías de los sólidos platónicos, conocidos y sobados desde la antigüedad. Los griegos, dícese que el mismísimo Platón, sabían de su importancia y unicidad, que tenían una simetría exacerbada y que con tanta simetría (quitando la esfera que no se mide y por lo tanto pasa a otras ligas) eran sólo cinco —el tetraedro, el cubo o hexaedro, el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro—, que reaparecen en Kepler como teoría cosmológica, en muchos otros puntos de la historia y luego aquí entre caleidoscopios. Pero no nos dejemos impresionar, insistamos en los caleidoscopios para de ahí reconstruir los afamados sólidos.

Tomemos en las manos a alguno de los tres caleidoscopios. Consta de tres espejos planos que se intersectan en un punto: el vértice o *centro*, llamémoslo. Es un cucurucho triangular con espejos hacia adentro; nos podemos asomar por su boca, o base: hagámoslo, pensando que es grande —mas no frágil o pesado, al fin que estamos soñando— para poder meter la cabezota. Lo que ya sabemos es que al voltear a las tres aristas, que llamaremos *rayos*, donde se juntan por pares los espejos, hay diédricos del orden que dictan los tres numeritos. ¿Y, más allá? ... despacio. Pegados a mi cucurucho, por su espejo correspondiente, hay tres cucuruchos iguales —invertidos, claro— que siguen compartiendo el vértice o centro. Y alrededor de ellos se ajustan más y más cucuruchos sin problemas de cupo alrededor de las aristas, que van asemejando rayos, encajando perfectos, y saliendo del centro. ¿Está claro?, naturalmente se van curvando. Van formando una esfera como estalagmitas ideales, o gajos de acitrón, y cada cucurucho con su cabecita adentro husmeando y sorprendida, papaloteando en diferentes direcciones pero con coordinación caleidoscópica.

Ahora, volteemos hacia el centro. La maravilla es que sí se cierra la esfera. Los cucuruchos se ajustan completándola con limpieza inaudita alrededor del centro, y justo detrás de él hay un yo viéndome. Pero aquí surge una sutil diferencia. En el caleidoscopio $T[2,3,3]$ aquel yo es un yo rotado —se le nota pues no me ve a los ojos, y al girar mi cucurucho lo hago girar a él, y nos cuesta trabajo el contacto visual—. Pero el de los otros dos sí asusta, justo detrás del centro está ese yo de cabeza mirándome fijo; si le cierro un ojo, los que quedan abiertos se alinean al instante con el centro en una liga indestructible por más que cabeceemos; y si giro mi cucurucho, él se queda ahí girando el suyo, como ayudándome a mover todo lo demás. Y esto sucede porque viene de la transformación “antípoda”, que es parte de estos grupos y ahí está: actuando.

Estos tres grupos son finitos y sus elementos corresponden a mis cabezas que veo; la identidad, por supuesto, a la que traigo puesta. En $T[2,3,3]$ hay 24; en $T[2,3,4]$ 48, y en $T[2,3,5]$ se ven 120 cabezas. Cualquier cosa que se introduzca al cucurucho generará imágenes de hermosa simetría. En particular, podemos armar los sólidos platónicos con un pedacito de papel o una varilla. Otra manera consiste en truncar el cucurucho cerca de su vértice. Esto nos impedirá ver al yo antípoda, pues aparece un “sólido” etéreo en el centro. En $T[2,3,3]$, truncando perpendicular a un rayo de ángulo $\pi/3$, aparece el tetraedro; en $T[2,3,4]$, truncando perpendicular al rayo $\pi/4$, surge el cubo, y al $\pi/3$ el octae-

dro, y en $T[2,3,5]$, por el de $\pi/5$ sale el dodecaedro y por el de $\pi/3$ se arma un icosaedro.⁴ Su asociación como duales reside en que tienen la misma simetría.

Cuatro espejos (su historia)

Esto fue la teoría. ¿Bonita, no? ¿Y a poco no se antoja armar uno de estos caleidoscopios —el de 120 cabezas de una vez— para verlo-verlo? Pero ahí te quiero ver. Hay que cortar vidrios en formas muy precisas y raras, para luego ajustarlos y pegarlos, y en fin, que no es lo mismo manejar planos e intersecciones como matemático que como vidriero. Pero la terquedad es la terquedad y en su momento tuve la posibilidad de hacerlo y conté con un excelente equipo creativo (de esos seres maravillosos que crean cosas de verdad) que apoya y motiva y hace y... pum: ahí están, en Universum, se les conoce como los Rolidoscopios. Pero ésta no es la historia que quiero contar.

Mientras se construían los Rolidoscopios —ahí en la sala de matemáticas en gestación, CU, 1992— un ceramista armaba otra maravilla, su Mosaico de Penrose (obra maestra no sólo del México actual sino del mundo). Se llama Juan Sandoval. Quizá por la cercanía en ese estado de estar haciendo, creando realidad, o por su encanto propio, mágico y luminoso, se contagió del gusanito de los espejos, y se obsesionó con la idea de que si estaban ahí esos caleidoscopios que nunca nadie (que conociéramos al menos) había visto, ¿por qué no habría de haber más? Yo, acá, muy ducho, muy matemático, salía con mi rollo de que sólo hay cinco sólidos platónicos y bla, bla, bla... y en el fondo todavía no entendía. Pero él veía mucho más allá. Intuyó como artista que debía haber más. Aprendió el oficio de vidriero, y empezó a jugar. Me llevaba modelitos maravillosos que veíamos absortos hasta hacer bizcos, acoplando los clásicos o añadiéndole nuevos elementos. Y empezamos naturalmente a colaborar: él, el motor creativo, visionario, rebelde y emprendedor; yo, el técnico, crítico, frío, calculador. Cada colaboración tiene su historia, su ritmo, sus papeles, su encanto o desencanto, sus momentos —parezco doctora corazón hablando de matrimonios—, y ésta se dio y dio. Tres rozagantes caleidoscopitos cuya gracia genialmente simple es... ¿a ver?, ¿adivinó?... tener cuatro espejos en ángulos racionales. Y sólo hay esos tres. Solicitamos la patente, y la ganamos en los Estados Unidos. En el proceso leímos

cientos de ellas; aprendí que desde Moëbius ya se había hablado de —no construido— los tres platónicos; que un israelita los patentó en 1972; que otro gran geómetra, pero de este siglo, Coxeter, había desarrollado la teoría de grupos de reflexiones y que Tits acabó de clasificarlos en todas las dimensiones. Y en fin, acabé obsesionándome como matemático en aspectos de esa área y produciendo en ella, y ahora entiendo algo. Por su parte, Juan Sandoval es el único artista en el mundo que puede producir unos ejemplares de exactitud pasmante, objetos de museo (los dos primeros viven en Universum), y sigue viviendo de su hermosa escultura cerámica.

De esta historia me quedan, además de experiencias y conocimiento, dos grandes satisfacciones y una angustia. Primero, el enorme placer de acercarme, sobar y asomarme a los caleidoscopios que de vez en vez produce Juan, objetos escultóricos de texturas cerámicas y presencia geométrica en apariencia irracional, que invitan a asomarse por sus ventanas triangulares. Hay que ser descarados y ver con los dos ojos abiertos hacia adentro para perderse en su profundidad, pues generan, abren, crean un espacio perfecto sobrepuesto al nuestro, paralelo quizás y coincidiendo con él sólo en el volumen que veíamos por fuera y que podemos volver a recorrer para observar aquel vacío infinito desde otra ventana y en otra dirección. Nuestro mundo les regala su luz por las ventanas y ellos la transforman en infinitos sólidos etéreos de simetría platónica y textura caleidoscópica, que flotan impávidos en posiciones obsesivamente precisas y sincronizadas; y en algunos de ellos vemos nuestra imagen observando: observándose. Lo que los de Brewster son a la segunda y las peluquerías a la primera, estos caleidoscopios son a la tercera dimensión. Segundo, la satisfacción de saber que si Occidente nos deslumbró con los espejos de vidrio hace quinientos años, hoy se los podríamos regresar de cuatro en cuatro y cortados en formas caprichosas pero puestos en su debido lugar. Y tercero, la angustia de que Juan y yo seamos incapaces de aprovechar en toda su magnitud esta oportunidad. ♦

Lecturas recomendadas

- Coxeter, H. S. M., *Regular Polytopes*, Dover, Nueva York, 1973 (1ª edición, 1942).
- Sherk, F. A., et al (eds.), *Kaleidoscopes; Selected Writings of H. S. M. Coxeter*, Canadian Mathematical Society Series of Monographs and Advanced Texts, Wiley, Nueva York, 1995.

⁴ Y ya lo dejo en paz, no intentaré explicarlo.