

# LOS DETERMINISMOS DE LA FÍSICA

Tomás Brody

A través de los años se ha discutido mucho acerca del determinismo o indeterminismo en la física. La principal pregunta suele ser si las teorías de la física son deterministas o solamente probabilistas; se dice, por ejemplo, que la física clásica —la del siglo XIX— era determinista pero que la mecánica cuántica nos ha obligado a abandonar esta posición. Pero se va más allá; de tales posiciones se intenta destilar un jugo ontológico que como trataremos de demostrar aquí es ilícito.

Un caso típico de esto lo vemos en la mecánica cuántica que comúnmente se describe como esencial indeterminista, en oposición a la física clásica, supuesta totalmente determinista; el pensamiento más ortodoxo ve el origen de tal indeterminismo en el papel central que juega en la mecánica cuántica la función de onda cuyo cuadrado sólo nos da probabilidades de observar cosas, no nos da el tipo de predicción firme que resalta de la mecánica de partículas puntiformes. De ello se saca la conclusión de que el mundo es “esencialmente indeterminista”, con lo cual —se nos informa— se derrumba uno de los pilares de la filosofía materialista. Más aún, como el azar y la probabilidad se ven como debidos a nuestra ignorancia y no como la expresión de un aspecto objetivo del sistema estudiado, se llega a una conclusión todavía más contundente: en la mecánica cuántica el azar, es decir, nuestra ignorancia, es de la esencia, lo cual implica que estamos en el límite de lo que puede alcanzar la investigación científica; la mecánica cuántica, dicho en otros términos, constituye la última teoría general que ideará la física, constituye su frontera definitiva.

Tales argumentos se basan en confusiones y sobresimplificaciones las cuales hay que sacar de la oscuridad que les ha permitido enraizarse entre las ideas generalmente admitidas. Con este objeto proponemos aquí cuatro tesis que si bien no acaban con el problema, por lo menos lo colocan —esperémoslo— en un terreno más cercano a la realidad.

La primera tesis es que el determinismo no es una característica ontológica sino una noción epistemológica. Es decir que no es el mundo en que vivimos lo que podemos caracterizar como determinista, sino solamente tal o tal descripción

que demos de una fracción de él. Un ejemplo hará obvia la distinción: el comportamiento de un cierto volumen de gas se puede describir (en principio, con los métodos de cálculo actuales estamos limitados a casos con algo como 1000 moléculas o menos) en términos de las trayectorias que siguen las moléculas, calculadas con la mecánica clásica. Esta descripción —o modelo, como suele decir el físico— es determinista, en el sentido de que dadas las posiciones y velocidades iniciales están perfectamente determinadas las posiciones y velocidades en cualquier momento posterior. Un modelo alternativo, determinista también aunque en otro sentido, es el de la termodinámica clásica; sin hablar de moléculas, sin siquiera esta variable fundamental que es el tiempo, establece relaciones entre variables de otro tipo: presión, volumen, temperatura, entropía; aquí el conocimiento de algunas de estas variables permite deducir todas las demás. La conexión entre los dos modelos se hace mediante un tercer modelo, el de la mecánica estadística. En este modelo se mantienen las moléculas, pero en vez de seguir individualmente sus trayectorias, hacemos promedios sobre las condiciones iniciales compatibles con las condiciones macroscópicas que estamos pidiendo; he aquí, pues, un modelo probabilístico que no hace predicciones exactas e incondicionales, sólo nos da probabilidades para que suceda tal o cual cosa. A pesar de ello, este modelo es más poderoso que los otros dos.

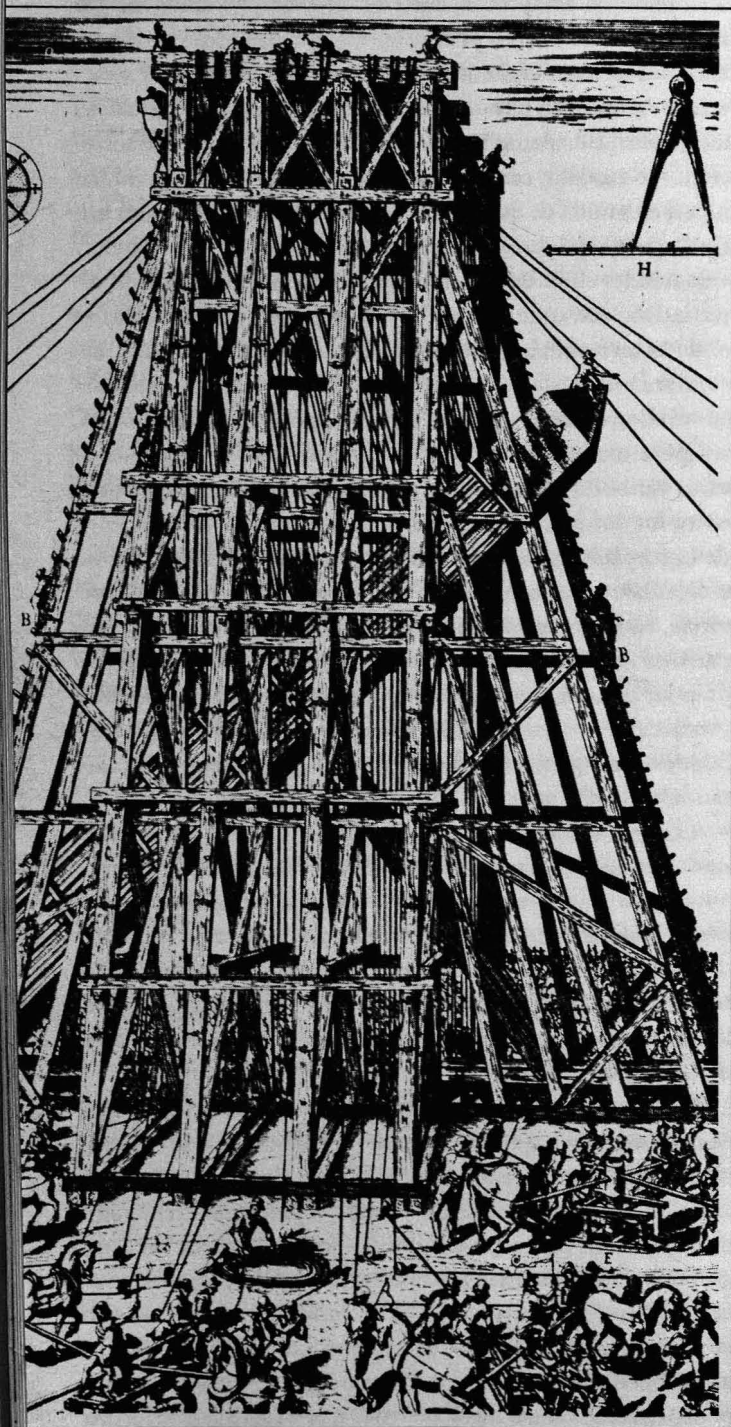
Los tres son modelos para el mismo sistema físico, cada uno con sus ventajas y limitaciones peculiares. Es evidente ahora que no podemos atribuir la propiedad de determinismo al sistema mismo cuando tenemos dos descripciones deterministas (en diferente sentido) y una indeterminista. Hablar de que las moléculas del gas “son” deterministas o no lo son carece de sentido: es el modelo teórico al que se le puede aplicar la descripción.

La cosa pierde su aspecto sorprendente si recordamos que es precisamente mediante el modelo que hacemos predicciones sobre el comportamiento futuro del sistema: “determinista” o “indeterminista” caracteriza la predicción. Es cuando conocemos (o creemos conocer) profundamente bien un sistema, cuando nuestro modelo es muy adecuado, que a veces podemos permitirnos el lujo de confundir el modelo con el sistema modelado. Esto es precisamente lo que pedimos a una buena teoría, poder usar el modelo en vez del sistema, poder hacer teoría en lugar de tener que experimentar. Pero

*El trabajo Los determinismos de la física fue escrito por Tomás A. Brody probablemente alrededor de 1985 y para un público general pero interesado en los problemas de la filosofía de la física. Algunas de las tesis aportadas por Brody en este trabajo son novedosas y merecen un estudio y desarrollo detallados. El propio Brody en un trabajo ulterior un tanto más técnico (pero con el mismo título) que quedara inconcluso reabrió estos problemas.*

cuando examinamos filosóficamente esta misma teoría (o cuando estudiamos su validez), no podemos confundir las dos cosas, la descripción y el sistema descrito. Una analogía: sería inadmisible confundir "México tiene 15 millones de habitantes" con "México tiene 6 letras" para obtener "México tiene una letra para cada dos millones y medio de habitantes", ni podemos preguntar si México se compone de letras más bien que de habitantes.

Cabe notar que reconocer que el espíteto de determinista no se aplica al mundo, aceptar que —en la jerga actual de los filósofos— usarlo así constituye un error de categoría, invalida una buena parte de las discusiones tradicionales sobre nuestro tema; más o menos como advertir la distinción entre una cosa y su nombre invalida el pensamiento mágico. Los modelos que construimos de la realidad no tienen efecto so-



bre ella sino en la medida que nosotros los usamos para guiar nuestras acciones sobre esta realidad.

La *segunda tesis* que aquí se propone nos dice que el término "determinismo" en realidad cubre varias nociones distintas y que hay que distinguir. Arriba ya vimos que dos modelos diferentes conllevan tipos diferentes de determinismo: uno ligado a la evolución en el tiempo de las trayectorias, otro en que las variables, independientes del tiempo, se condicionan unas a otras. También hay determinismos espaciales, como el de un tapiz en el que inferimos el dibujo de las flores en una esquina a partir de lo que vemos en otra. En la física se infiere de manera análoga la estructura cristalográfica de un cristal macroscópico a partir de observaciones sobre diminutas fracciones de él. Se puede ir más lejos: de experimentos sobre unas cuantas muestras de una sustancia sacamos conclusiones del tipo de "el cobre (es decir, cualquier muestra de cobre) es un metal rojizo, excelente conductor de calor y electricidad, con un óxido de color verde." Esta inferencia no es temporal, pero tiene la estructura de un determinismo: observación de ciertos datos en algunas muestras, una teoría de que estas propiedades se originan en la constitución material de las muestras, y la conclusión de que si otras muestras tienen algunas de estas propiedades también tendrán las demás.

Aun el determinismo temporal, en su forma más tradicional, no carece de distinciones relevantes aquí. Tomemos el ejemplo de la electrodinámica de Maxwell, la teoría que predijo la existencia de las ondas de radio. Las ecuaciones maxwellianas admiten soluciones expresadas en términos de los potenciales de Liénard-Wiechert de dos tipos, retardados y adelantados, que respectivamente permiten calcular el estado del campo electromagnético para el pasado y el futuro. Ha habido mucha discusión confusa sobre cuál de los dos potenciales debe emplearse en las aplicaciones; hay quienes arguyen que usar el potencial adelantado, escrito como función del tiempo por venir, viola el principio de causalidad. Pero ya en 1909 Einstein dio una respuesta muy clara al problema, sólo que desde entonces se ha olvidado: con tal de que tratemos un sistema confinado a una región finita, los dos tipos de potencial son perfectamente válidos y corresponden a dos situaciones distintas. Si tomamos como punto de partida las condiciones del campo en la frontera de la región finita en un instante inicial, entonces el potencial retardado nos sirve para calcular la evolución futura del sistema; si en cambio usamos las condiciones finales, el potencial adelantado nos describe cómo evolucionó el campo para llegar a este estado final. En un caso tenemos un determinismo anterior (o hacia adelante), en el otro uno posterior (o hacia atrás). Aquí decide no el sistema ni tampoco el modelo empleado, sino simplemente el tipo de condiciones en la frontera con las cuales arrancamos el cálculo. De hecho, como mostró Einstein, no hay inconsistencia: partiendo de condiciones iniciales obtenemos la conformación final del campo, partiendo de ésta hacia atrás recuperamos las condiciones iniciales. Incluso podemos usar condiciones mixtas entre iniciales y finales, o condiciones en un instante intermedio, si así conviene para el problema que hay que resolver.

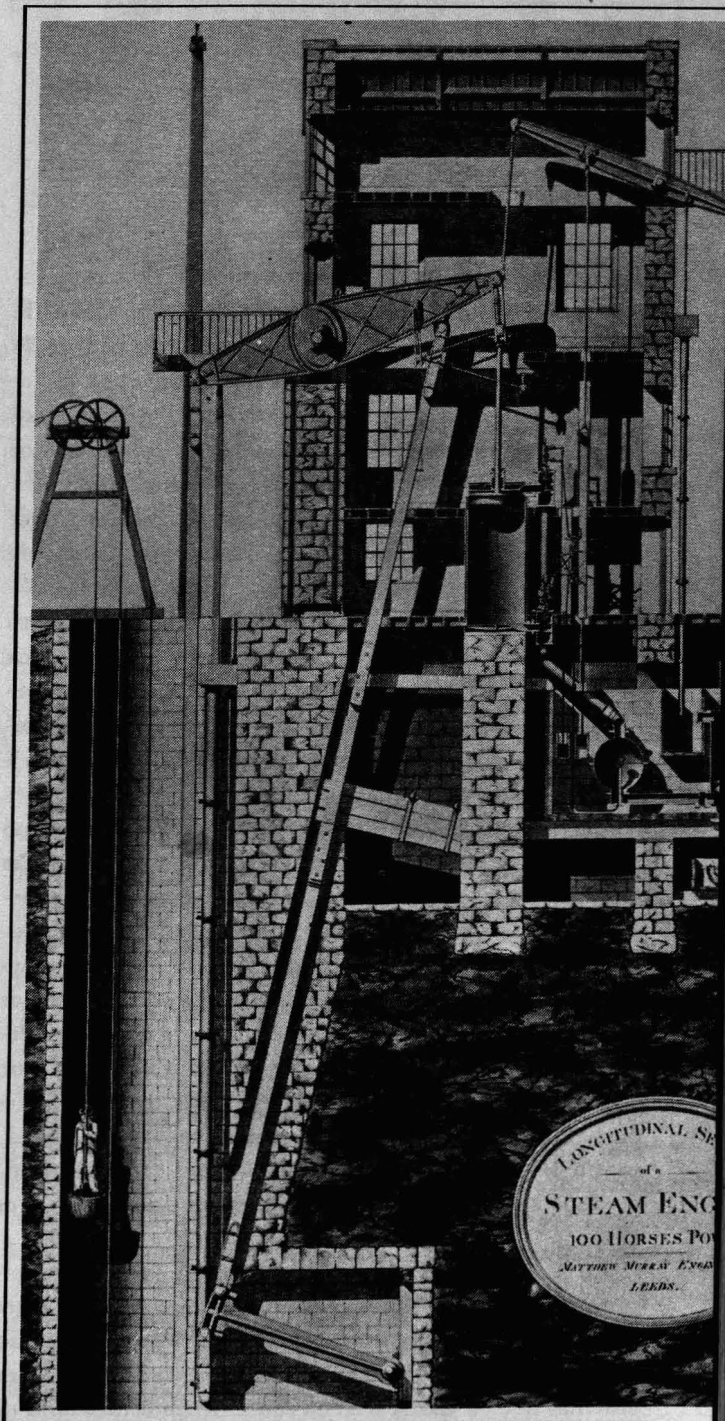


En este último caso calculamos tanto el futuro del sistema como su pasado a partir de los mismos datos en la frontera. Se ve que el determinismo aquí es bidireccional; y de hecho la distinción entre este tipo de determinismo y el determinismo unidireccional —que sólo permite predicciones o sólo retrodicciones— resulta más significativo filosóficamente que el contraste anterior-posterior. Un proceso descrito con un modelo bidireccional es reversible: si invertimos el signo del tiempo en todas las ecuaciones (si “corremos la película hacia atrás”) obtenemos la descripción de otro proceso que también es factible. Un proceso unidireccional no se puede invertir así. En cambio, puede presentar fenómenos al azar: por ejemplo los procesos no lineales pueden exhibir una extraordinaria gama de diferentes comportamientos azarosos cuyas complejidades y ricas estructuras forman ahora un tema de muchas investigaciones. (El apéndice exhibe más detalle.)

El ejemplo electromagnético subraya también otro aspecto. Como mencionamos, la compatibilidad de los determinismos anterior y posterior se obtiene solamente dentro de sistemas finitos y acotados; en cambio, el determinismo de las ecuaciones de la mecánica clásica no tiene tales restricciones. Esta distinción entre lo que podemos llamar determinismo confinado y determinismo global tiene implicaciones filosóficas: la forma global y bidireccional puede extenderse a ser además total, a englobar todas y cada una de las propiedades que podrían concebiblemente entrar en la descripción del mundo; esta forma, asociada con el nombre de Laplace, adquiere matices ontológicos cuando implica que por detrás de modelos con otras formas de determinismo menos “perfectas” debe haber la posibilidad de un modelo que lo exhibe perfecto, total, global y bidireccional. El determinismo laplaciano, en la medida que se ve ontológico, adquiere un carácter fatalista: todo, absolutamente todo acontecimiento está rigurosamente determinado y a su vez entra en la determinación de todo acontecimiento futuro. No se admite, pues, ningún libre albedrío. Desgraciadamente la física —que supuestamente origina y respalda este género de fatalismo inexorable— no presenta ningún ejemplo de un determinismo laplaciano. Los que encontramos son en su mayoría confinados o unidireccionales o ambas cosas. Hasta el de la mecánica newtoniana, global y bidireccional, no es total: se refiere solamente a las variables, como posición o velocidad, que describen el movimiento de las partículas. La extrapolación de que todas las propiedades del mundo físico pueden reducirse a los movimientos de sus partículas constituyentes es un agregado metafísico, extraño a la física misma. Por otro lado, el exacto determinismo de la mecánica clásica es el determinismo del modelo teórico: su aplicación a la realidad viene limitada por la inevitable imprecisión con la que podemos fijar las condiciones en la frontera, por la imposibilidad de tomar en cuenta todas las fuerzas entre las partículas o siquiera las que actúan entre las partículas y cuerpos exteriores al sistema. Tenemos aquí una confusión nada útil entre lo que tiene bases sólidas en la física y lo que suele propalarse bajo el manto protector de la filosofía académica.

Una confusión semejante se observa en la costumbre muy difundida de hablar de causalidad y determinismo como si

fueran sinónimos. Tal vez sería menos absurdo presentarlos como incompatibles. Para que podamos hablar de causalidad, debe tener sentido distinguir entre los factores en nuestro modelo que son causas y aquellos que no lo son —y que por lo tanto podemos eliminar de nuestra descripción si tampoco son efectos; pero muchos determinismos, y en particular el laplaciano, son totales y se refieren a todos los factores involucrados en el modelo. Si la causalidad tiene relación con algún determinismo, ha de ser con una forma confinada y parcial. Más aún, el concepto de causalidad se sale del marco de lo que da el determinismo. Un modelo determinista establece una relación entre ciertas variables, lo que en física se expresa mediante ecuaciones; ahora bien, estas ecuaciones permiten escribir algunas de estas variables en términos de las otras, pero pueden transformarse de múltiples maneras, y la selec-





ción de las variables que figuran como resultado parece arbitraria. Entonces, ¿cuáles de todas las variables representan causas, cuáles efectos?

La respuesta no puede venir de dentro del sistema. Esta conclusión sorprendente se aclarará mediante un ejemplo. Un volumen de gas se suele describir (con suficiente precisión para nuestros fines) mediante la ecuación:

$$pV = nRT$$

en donde  $p$  es la presión del gas,  $V$  su volumen,  $T$  la temperatura;  $n$  representa la cantidad de gas, mientras  $R$  es la constante universal de gases. También podemos escribir esta ecuación en la forma:

$$p = \frac{nRT}{V}$$

y usarla para determinar el aumento de presión que resulta si calentamos el gas hasta una temperatura  $T'$ ; o podemos escribirla:

$$T = \frac{pV}{nR}$$

para deducir la temperatura que resultará si comprimimos el gas a una presión  $p'$ . En el primer caso el aumento de la temperatura ha de considerarse como la causa del cambio de presión; en el segundo, al revés. ¿A qué se debe la diferencia? En el primer caso calentamos el recipiente del gas, colocándolo sobre una fuente de calor; en el segundo movimos un émbolo, usando energía mecánica que se origina fuera del sistema. Y es nuestra decisión de hacer una cosa más bien que la otra lo que transforma en causa el cambio de una de las dos variables y en efecto el cambio de la otra. La causalidad tiene por lo tanto un importante aspecto subjetivo: pero —contra todas las ideas tradicionales— este aspecto radica en nuestra acción sobre el sistema y no en las ideas que revolvemos en la cabeza (salvo, evidentemente, aquellos conceptos que empleamos para tomar la decisión de cómo actuar).

Pero la acción no tiene que ser nuestra. Aunque éste es el caso que más nos interesa y en donde sin duda se originó el concepto de causalidad, en el Universo hay otras muchas situaciones a las cuales se ha de aplicar el término. En general, lo que normalmente establece la dirección de un nexo causal —lo que discrimina entre causa y efecto— es la interacción con otro sistema no comprendido en el modelo que hemos usado. Pero si este otro sistema está fuera de nuestro modelo, también está fuera de cualquier determinismo de los que ocurren en la física. Excepto, por supuesto, del determinismo laplaciano, en el cual de todos modos no hay causalidad, ya que la distinción entre causa y no-causa carece de sentido: todo es causa si precede el instante del presente, todo es efecto si le sucede.

La descripción causal se sale del simple marco determinista y se sitúa en el nivel ontológico de las relaciones entre diferentes sistemas. Es una propiedad intrínseca de nuestro mundo que, a pesar de su esencial unidad, se deja dividir en sistemas que en buena medida son independientes unos de

otros pero que al mismo tiempo interactúan de tal modo que dentro de cada sistema podemos expresar su influencia en términos de causa y efecto. Observar este hecho, darse cuenta que constantemente nos movemos de una división en sistemas a otra, formando nosotros estos sistemas ya teóricamente, ya por nuestra interferencia experimental (e incluso ambas cosas), observar todo esto no sólo es ver las implicaciones ontológicas de la causalidad; es empezar a comprender cómo podemos primero llegar a entender cómo funciona la naturaleza y luego aprovechar este entendimiento para actuar sobre ella en beneficio nuestro.

Podemos resumir esta discusión en nuestra *tercera tesis*: la causalidad es compatible con ciertos determinismos pero rebasa su marco, ya que contiene elementos ontológicos significativos; las formas de determinismo compatibles con la causalidad lo son también con la ocurrencia de fenómenos azarosos. Causalidad y azar por ende no se oponen sino se complementan; hay oposición solamente entre el azar y determinismos que como el laplaciano no tienen cabida en la física.

Esta tesis hace patente que los argumentos tradicionales sobre las implicaciones acausales de la mecánica cuántica son poco sólidos. Del hecho de que la mecánica cuántica utilice el concepto de la probabilidad en forma irreducible no se puede concluir que no admite la causalidad, ni tampoco que no podemos ir más lejos en la física; más bien es una indicación de que nuestro entendimiento del lazo entre un sistema cuántico y el resto del Universo es incompleto; y esto es precisamente lo que nos decía Einstein hace medio siglo. Esta idea se ve confirmada por los esfuerzos para “completar” (más adecuadamente, reformular) la teoría, que en los últimos diez o quince años parece finalmente haber encontrado el buen camino. La clave está en considerar como abiertos los sistemas que muestran un comportamiento cuántico, como en constante interacción con el resto del mundo. Pero estas interacciones no se pueden describir explícita y detalladamente, porque entonces simplemente habríamos ampliado el sistema que contempla nuestro modelo al punto de volverlo inmanejable; la descripción tiene que ser estadística, tiene que promediar cómo se comporta el sistema bajo todas las interacciones posibles. La evolución temporal que resulta es la de un proceso estocástico que exhibe estados de equilibrio cuasi-estacionarios: los estados cuánticos. Falta mucho aún para redondear esta teoría (y ya no entro en más detalles técnicos), pero ya ha tenido varios éxitos, y sobre todo goza de una claridad conceptual que ya no permite aberraciones como las que hemos mencionado y otras más que figuran en la literatura sobre el tema. En cuanto a nuestro problema aquí, la teoría muestra aspectos deterministas e indeterministas cuyas relaciones son claras, puede dar lugar a modelos causales y a modelos probabilísticos, puede dar lugar también a modelos que combinan ambos aspectos. En todo esto se asemeja pues bastante a las teorías de la física clásica, más de lo que hace la mecánica cuántica en su forma tradicional; en otros aspectos, desde luego, difiere grandemente. . .

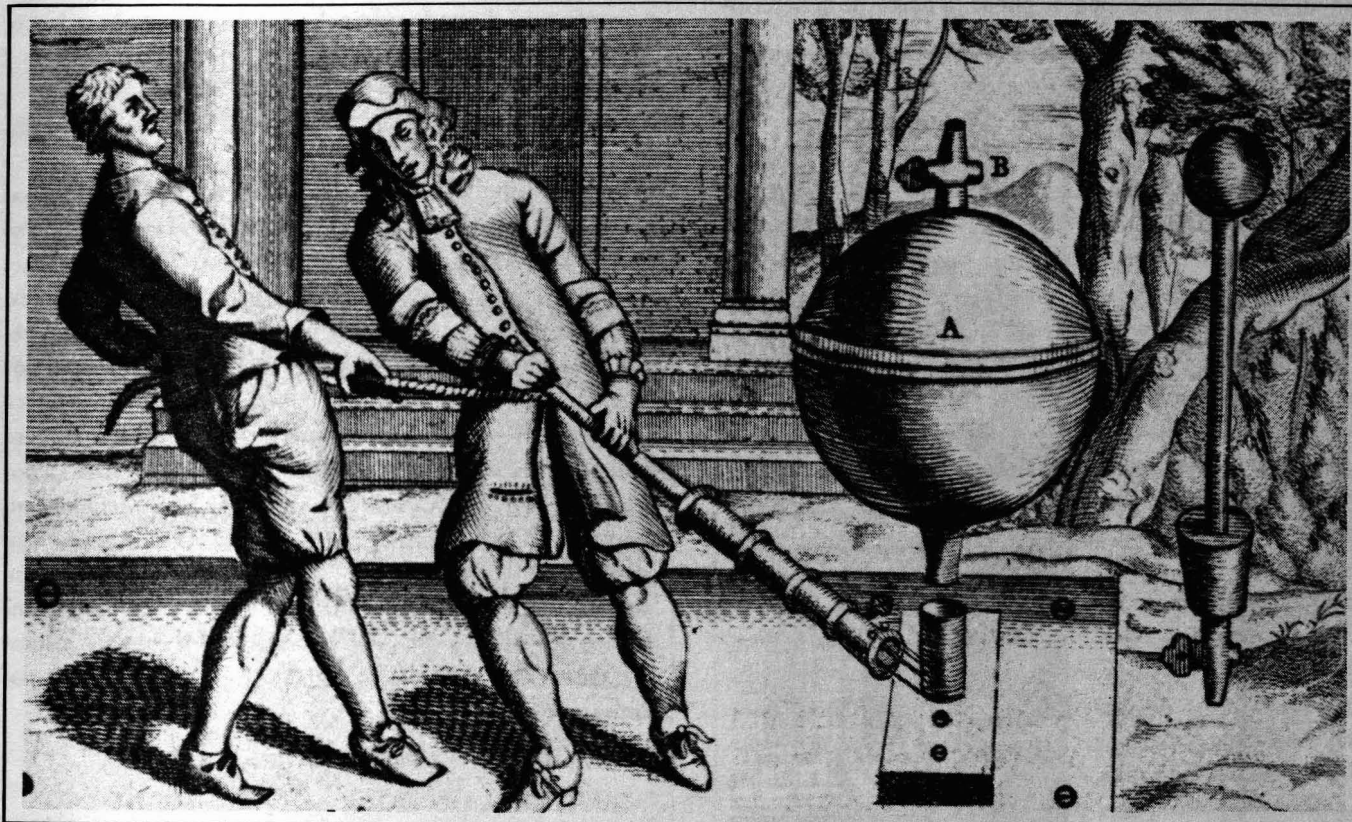
La discusión que precedió la tercera tesis introdujo la noción del sistema como algo que en buena medida está aislado



del resto del Universo, si bien no totalmente. Esta misma noción está a la raíz de la *última tesis* que aquí propondremos: las cantidades de interés en la investigación científica (con escasas excepciones) no se pueden determinar con absoluta precisión; todas tienen lo que se llama límites de error experimental, límites que en realidad son estimaciones cuantitativas de la importancia de las fluctuaciones o perturbaciones que el sinfín de factores externos al sistema provoca en estas cantidades. Entiéndase bien: el hecho de que se necesitan establecer límites de error forma parte de la práctica normal de los experimentadores desde hace mucho tiempo; la tesis solamente explica el hecho mediante el concepto de sistema parcialmente aislado. El hecho en sí —cuya existencia y cuyas implicaciones la filosofía suele ignorar— tiene una consecuen-

de curvas sin espesor es suficiente. En cambio, un tubo que crece exponencialmente crece tan rápido que en poco tiempo ha llenado todo el espacio accesible: con ello la predicción se reduce a decir que la partícula “estará en algún lado”. La distinción que hemos esbozado difiere de la distinción entre determinismos en que depende de las características intrínsecas del sistema y no (en términos generales) de las condiciones iniciales; es pues más fundamental que la diferencia entre “determinismo” e “indeterminismo” (en sentidos no demasiado claros) que tanto preocupa a ciertos filósofos.

La esencia de la distinción entre procesos que divergen en forma polinomial y los que lo hacen en forma exponencial es que los primeros son (limitándonos a tiempos no demasiado largos) predecibles con errores aceptables, mientras los se-



cia importante para nosotros, en el sentido de que las trayectorias que predicen los modelos deterministas (curvas matemáticas sin espesor) no son más que una aproximación. Buena en muchos casos, burda en otros, bien inadecuada en otros más, pero siempre una aproximación.

Para aquellos casos en que la aproximación es insuficiente, podemos considerar tubos en vez de curvas, tubos cuyas dimensiones en el punto inicial vienen dadas por los límites de error en este punto. La evolución temporal podría hacerse contraer a los tubos, pero es más común que se ensanchen: la incertidumbre en los valores iniciales provoca una incertidumbre creciente a medida que pasa el tiempo. Estudios relativamente recientes han mostrado que el crecimiento puede ser de dos tipos, polinomial o exponencial. Con el tipo polinomial el tubo crece mucho menos violentamente que si fuera exponencial; la precisión de las predicciones disminuye poco a poco, pero siguen siendo útiles durante un buen lapso de tiempo. En este caso muchas veces la aproximación

gundos son impredecibles. Sin embargo, “impredecible” aquí no significa que con tales procesos no se puede lograr nada, científicamente hablando; simplemente hemos escogido mal nuestros métodos, posiblemente hay que usar un modelo diferente para este tipo de sistema. A otro nivel, esta misma impredecibilidad puede ser útil para darnos modelos excelentes e incluso deterministas. El ejemplo del gas ideal lo ilustra. El modelo a nivel molecular, el primero que discutimos arriba, resulta ser del tipo exponencial y no nos dará predicciones muy interesantes; pero este mismo hecho nos permite construir un modelo estadístico que resulta extraordinariamente útil, aunque sus predicciones no sean más que probabilísticas; y como hemos visto, sirve de base para ir más lejos y construir modelos perfectamente deterministas, sin tiempo y por ello sin el problema de la divergencia exponencial.

Nuestras cuatro tesis revelan que la manera habitual de formular los problemas del determinismo no corresponde realmente al modo de funcionar de la física. El carácter determi-

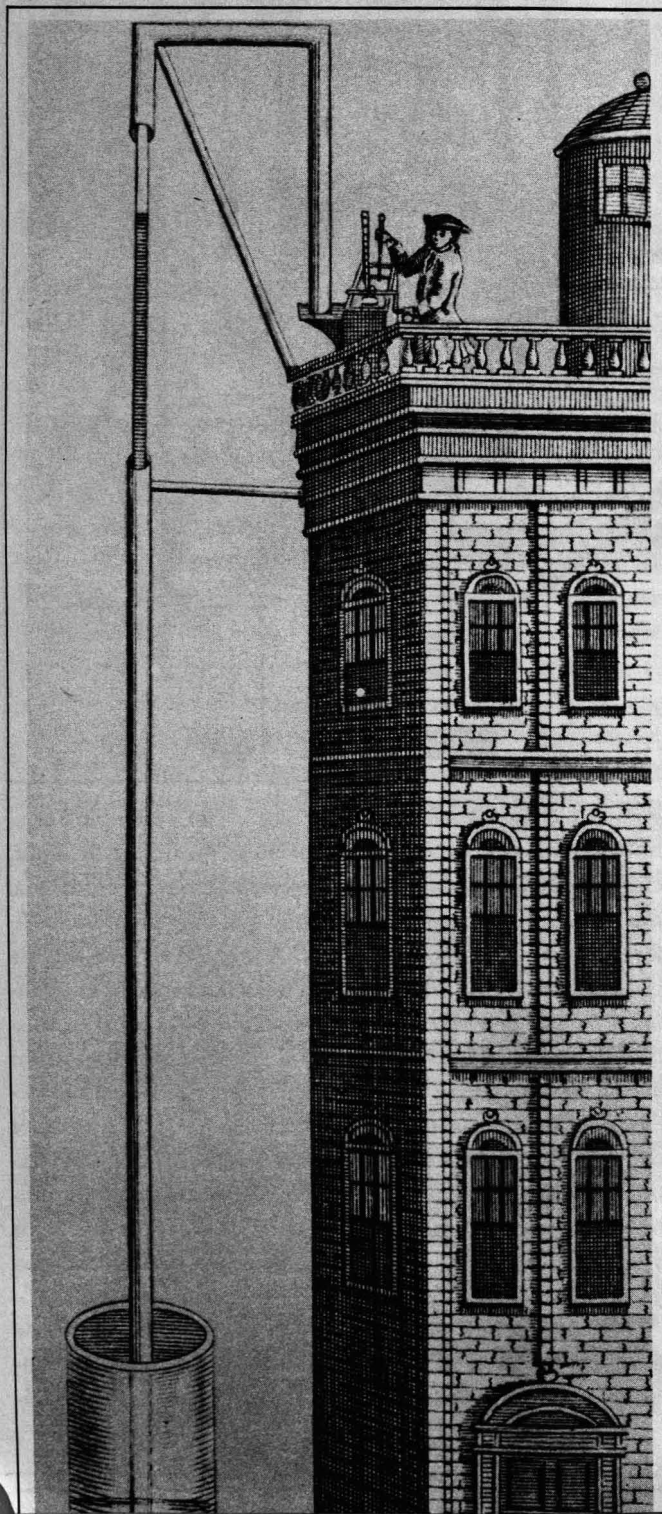


nista o indeterminista pertenece, no al mundo real, sino a los modelos teóricos que construimos para entenderlo; el término mismo de determinista cubre una gran variedad de diferentes relaciones entre variables físicas, y muchas de estas variedades ocurren entre los modelos que usa la física; algunas formas de determinismo admiten el azar, otras no son compatibles con él; determinismo y causalidad, tan lejos de ser sinónimos, difieren de modo fundamental, y algunas formas de determinismo son compatibles con la causalidad, otras no; finalmente encontramos un concepto cuyas implicaciones quedan aún por explorarse: la predecibilidad.

Para los filósofos queda mucho trabajo por hacer todavía.

## APÉNDICE

En un modelo bidireccional se puede, a partir de la descrip-



ción del sistema en un instante dado, calcular tanto el futuro como el pasado del sistema. Es decir, si una variable  $x$  (o un conjunto de variables, caso —indispensable en la física— al cual la generalización es inmediata, de modo que aquí nos podemos restringir a la situación más sencilla) representa el estado del sistema al tiempo  $t$ , siendo por lo tanto  $x$  una función  $x(t)$ , entonces existe una transformación  $T(t, t')$ , con  $t'$  mayor que  $t$ , tal que:

$$T(t, t')x(t) = x(t')$$

en donde  $x(t')$ , el valor de  $x$  al tiempo  $t'$ , es el resultado unívoco de aplicar  $T$  a  $x(t)$ ; y también existe  $\bar{T}(t', t)$  tal que:

$$\bar{T}(t', t)x(t') = x(t)$$

y se recupera el estado original  $x(t)$  como resultado unívoco.  $\bar{T}$  es por ende el inverso de  $T$  y el mapeo representado por  $T$  es biyectivo.

En un modelo unidireccional existe una transformación  $T(t, t')$  con  $t'$  mayor que  $t$  si se puede predecir el futuro; o existe la transformación  $\bar{T}(t', t)$  si se puede retrodecir el pasado; pero la transformación que existe no tiene su inverso único. Existirá en cambio más de un posible valor; si existe  $T$ , entonces  $\bar{T}$  nos llevaría a varias posibilidades diferentes, todas las cuales son predecesores del mismo estado del sistema desde el cual partimos hacia atrás. (Tiene que existir por lo menos uno, ya que en caso contrario el sistema se habría creado misteriosamente en el instante que contemplamos; pero éste puede ser cualquiera.) Que esta situación da lugar a posibles fenómenos azarosos se demuestra aquí mediante un ejemplo, más bien que con una deducción rigurosa, la cual requiere métodos matemáticos avanzados. Tomemos el caso en que en vez del tiempo  $t$  (que es una variable continua) tengamos sólo una variable  $i = 1, 2, \dots$  que *numera* los instantes; entonces un ejemplo sencillo de las transformaciones posibles es:

$$x_{i+1} = T(i, i+1)x_i = 2x_i^2 - 1$$

(con  $x_i$  comprendida entre  $-1$  y  $1$ ). Esta transformación es unidireccional: dado un valor de  $x_{i+1}$  no sabemos cuál de dos valores posibles de  $x_i$  le precedió en la serie de “tiempos”  $i$ . Por ejemplo,  $x_i = \frac{1}{4}$  y  $x_i = -\frac{1}{4}$  ambos llevan a  $x_{i+1} = -\frac{7}{8}$ . Ahora bien, si escogemos un valor inicial  $x_0$  y generamos sucesivamente  $x_1, x_2, \dots$ , entonces puede resultar una de dos cosas: (a) después de un cierto número todos los valores son iguales; por ejemplo, si  $x_0 = -\frac{1}{2}$  o si  $x_0 = 1$ , resulta que todos los números en la serie también tienen ese valor; si  $x_0 = \frac{1}{2}$  o si  $x_0 = -1$ , entonces  $x_1$  es diferente pero los que siguen todos valen lo que  $x_1$ ; en la jerga técnica se dice que el sistema se ha vuelto estacionario a partir de la  $i$  en donde empiezan a ser iguales todos los valores. Alternativamente tenemos el caso (b), todas las  $x_i$  son diferentes, sin ninguna repetición.

El caso (b) obedece estrictamente a la definición matemática de una serie de números al azar (un “colectivo” en el



sentido de Von Mises); entre sus propiedades podemos citar:

(i) Miembros sucesivos de la serie son independientes en el sentido estadístico, es decir que si calculamos el valor número  $n$  y el valor número  $n + 1$  a partir de muchas  $x_0$  diferentes, no habrá ninguna especie de correlación entre ellos. Por lo tanto, productos como  $x_i x_{i+k}$  sumados sobre todos los valores de  $i$  dan 0 para cualquier  $k \neq 0$ .

(ii) Si comenzamos dos series diferentes, una con  $x_0 = a$  y otra con  $x_0 = a + \epsilon$ , entonces por pequeña que sea crecerá en forma exponencial la separación entre los dos valores de  $x_n$  cuando aumenta  $n$  (la diferencia es aproximadamente  $= (-4)^n a \epsilon$ ), y rápidamente las dos series pierden toda semejanza y toda correlación. Para  $n$  muy grande, la diferencia ya no puede aumentar, en vista que las  $x_i$  siempre están entre  $-1$  y  $1$ ; pero su correlación desaparece, y las diferencias

entre las dos series, al principio regulares y pequeñas, se vuelven a su vez números al azar.

(iii) Si tomamos muchos valores iniciales  $x_0, x'_0, x''_0, \dots$ , la distribución estadística de  $x_n, x'_n, x''_n, \dots$  para  $n$  grande es la misma que la distribución que se observa a lo largo de una de las series; en términos técnicos, la transformación  $T(i, i + 1)$  es ergódica.

(iv) Si seleccionamos una subserie mediante cualquier criterio que no dependa del valor por seleccionarse, esta subserie tendrá las mismas propiedades estadísticas que la serie original. Este es el criterio de azar dado por von Mises.

A pesar de todas estas características que sólo esperamos ver en una secuencia caótica, al azar, la transformación que la genera corresponde perfectamente a lo que intuitivamente llamaría uno determinista. . .

Nótese que hay un número infinito de posibles valores  $x_0$  iniciales que caen en el caso (a): dos cuando la estacionariedad se inicia con  $n = 0$ , otros dos para  $n = 1$ , luego 3 para  $n = 2$ , 6 para  $n = 3$ , etcétera. Pero el número de valores  $x_0$  que acaban en el caso (b) —es decir, producen series que no se acaban— es aún mayor; el primero es “solamente” el número de números enteros, el segundo es el número de puntos en la recta. Y aun si por mala suerte tenemos una serie que terminará, con tal de que su longitud sea grande no es posible con pruebas estadísticas discriminar entre ella y una serie realmente infinita. En la medida en que el concepto se deja definir para secuencias finitas, éstas también son caóticas.

Por supuesto existen transformaciones con estas propiedades (y con otras aún más curiosas) cuando usamos una variable continua que puede verdaderamente representar el tiempo. Pero ya el caso sencillo que hemos visto ayuda a entender por qué las secuencias de números que generamos en las computadoras (mediante las llamadas rutinas generadoras de casuales) tienen todas las propiedades de las series al azar. Con estas series logramos simular, con el grado de precisión que pueda necesitarse, los procesos estocásticos y todos los fenómenos azarosos; este tipo de simulación, conocida como cálculos de Monte Carlo, se ha vuelto una herramienta extraordinariamente útil en aplicaciones tan variadas como el diseño de reactores nucleares y el estudio de procesos sociales.

Una computadora electrónica es el arquetipo de lo determinista, diríase, de lo exactamente previsible en su comportamiento. Que sea capaz de generar números casuales y con ellos imitar a la perfección los fenómenos azarosos es sorprendente para las concepciones filosóficas tradicionales; vemos su impotencia en el famoso dicho de von Neumann: “El que hable de generar números casuales mediante un algoritmo determinista se encuentra en un estado de pecado mortal.” En cambio, la tesis expuesta aquí de la multiplicidad de diferentes determinismos ofrece una explicación inmediata. Dado que la computadora borra el contenido anterior al escribir un resultado nuevo en su memoria, el determinismo al que obedece, por rígido que sea, es unidireccional y por ende compatible con los fenómenos azarosos. Las rutinas que generan números casuales, y los cálculos de Monte Carlo que las emplean, no hacen más que aprovechar esta posibilidad en forma sistemática. ♦

